|  |  |
| --- | --- |
| 结论六：三角形“四心”向量形式的充要条件 | |
| 结  论 | **设O为△ABC所在平面上一点,内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,则**   1. **O为△ABC的外心⇔||=||=||=.**   **(2)O为△ABC的重心⇔++=0.**   1. **O为△ABC的垂心⇔·=·=·.**   **(4)O为△ABC的内心⇔a+b+c=0.** |
| 解  读 | 三角形“四心”向量形式的充要条件直接来记忆一是难记，二是容易混淆；所以对于这四个结论的应用要以图形为基础进行理解，若用到时再推导即可。 |
| 典  例 | 设点是的重心，且满足，则\_\_\_\_\_\_\_。 |
| 解  析 | 【详解】  因为点是的重心，所以,因为,由正弦定理可得,  所以,即,  故,则,则由余弦定理可得. |
| 反  思 | 解决本题的关键是三角形重心的性质及平面向量线性运算的应用，结合余弦定理即可得解.由重心的性质及平面向量的线性运算可得，进而可得，再由余弦定理即可得解. |
| 针对训练\*举一反三 | |
| 1．（多选题）瑞士数学家欧拉在1765年发表的《三角形的几何学》一书中有这样一个定理：“三角形的外心､垂心和重心都在同一直线上，而且外心和重心的距离是垂心和重心距离之半，”这就是著名的欧拉线定理.设中，点*O*､*H*､*G*分别是外心､垂心和重心，下列四个选项中结论正确的是（ ）  A． B．  C． D．  【答案】ABC  【分析】  根据欧拉线定理、外心､垂心和重心的性质以及平面向量的线性运算对四个选项逐个分析可得答案.  【详解】  如图：根据欧拉线定理可知，点*O*､*H*､*G*共线，且  figure  对于A，因为，所以，故A正确；对于B，取的中点为，则，故B正确；对于C，，故C正确；对于D，显然不正确.  2．（多选题）已知是边长为2的正三角形，该三角形重心为点*G*，点*P*为所在平面内任一点，下列等式一定成立的是（ ）  A． B．  C． D．  【答案】BC  【分析】  根据平面向量的数量积的定义以及运算律，可判断出A不正确；故B正确；D不正确；根据三角形重心的性质，结合向量的线性运算可知C正确.  【详解】  因为是边长为2的正三角形，所以，故A不正确；，故B正确；根据重心的性质可得，所以，  所以，故C正确；因为，  ，故D不正确.  3．设的内角的对边分别为，点为的重心且满足向量，若，则实数（ ）  A．3 B．2 C． D．  【答案】C  【解析】如图，连接，延长交交于，  figure  由于为重心，故为中点， 由重心的性质得，，即  由余弦定理得，  ，可得：  ， 故选D．  4．过△OAB的重心G的直线与边OA，OB分别交于点P，Q，设＝h·，＝k，则＝\_\_\_\_．  【答案】3  【解析】延长OG交边AB与M，且M为AB的中点.所以，又 ，所以，且P、Q、G三点共线，且、不共线.所以，即，  5．已知点*G*是的重心，角*A*，*B*，*C*所对的边长分别为*a*，*b*，*c*，且，则角\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.  【答案】  【分析】  点*G*是的重心,可得，由题设可知，再结合余弦定理可求得角的大小.  【详解】  由点*G*是的重心,可得，又，所以  由余弦定理可得又，则。  6．在中，，，，若点为三角形外心，则满足关系式：的有序实数对\_\_\_\_\_\_\_\_.  【答案】  【分析】  根据题意，作出图形，先根据，结合模的公式 可得，进而得，，另一方面，延长与三角形的外接圆交于点，则，，再联立方程即可得答案.  【详解】  根据题意，作出图形如图，延长与三角形的外接圆交于点，因为，  所以，即，所以，  所以，同理，  又，同理，  所以，解得，所以有序实数对.  figure  7．在锐角*ABC*中，，若点*P*为*ABC*的外心，且，则*x*＋*y*的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_．  【答案】  【分析】  设*ABC*的外接圆半径为5，以为轴，以的垂直平分线为轴，建立平面直角坐标系，若*ABC*为锐角三角形，过点*P*作，其中分别交*AB*，*AC*于点，，*AP*的延长线交*BC*于点*R*，根据向量共线的推论，设，可得，为使*k*取最大值，只需使最大即可.  【详解】  不妨设*ABC*的外接圆半径为5．如图：  figure  取点，，，并作*BQC*的外接圆，则点*P*为，则此时且，所以当且仅当点*A*是优弧上除*B*，*C*以外的点．当*ABC*为锐角三角形时，过点*P*作，其中分别交*AB*，*AC*于点，，*AP*的延长线交*BC*于点*R*．  设，则由，*P*，共线，可得．设，  则，所以，，，  所以为使*k*取最大值，只需使最大．过*A*作*x*轴的垂线交，*BC*分别于点*M*，*N*，则，  又，所以当时，． | |

****